METODO RISOLUTIVO PER LE EQUAZIONI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI DI ORDINE n. (Ver. 2)

1 - EQUAZIONI OMOGENEE

Si scrive l'equazione nella forma:

$$u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = 0$$

(1) Si scrive il polinomio $P(\lambda)$ con gli stessi coefficienti:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Si trovano le radici del polinomio:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

(a) se ho n radici reali distinte:

allora tutte le soluzioni dell'equazione (1) si scrivono nella forma:

(1a) $$u(x) = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + A_n e^{\lambda_n x}$$

con $A_1 \dots A_n \in \mathbb{R}$.

(b) se ci sono radici complesse coniugate:

in corrispondenza di tali radici:

$$\lambda = \alpha + i\beta \qquad \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$$

nella soluzione (1a) al posto dei due esponenziali complessi $e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm i \operatorname{sen}\beta x)$

prendo le funzioni reali:

(1b) $$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$$

(c) se ci sono radici multiple:

nella formula (1a) gli esponenziali ripetuti vanno moltiplicati per x, $x^2 \dots$ etc. in modo da avere comunque n addendi tutti diversi:

$$A_1 e^{\lambda x} + A_2 x e^{\lambda x} + \dots + A_m x^{m-1} e^{\lambda x}$$

dove m = molteplicità della radice.

ESEMPIO

$$u'' - 3u' + 2u = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

tutte le soluzioni sono:

$$u(x) = A e^{x} + B e^{2x}$$

con $A, B \in \mathbb{R}$.

ES: $u''' - 2u'' + 5u' = 0$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 5\lambda = 0$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 5)\cdot\lambda = 0$$

$$\lambda_{12} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2i$$

$$\lambda_3 = 0$$

le soluzioni sono:

$$u(x) = A \cdot e^{1x}\cos(2x) + B e^{1x}\sin(2x) + C e^{0x}$$
$$= A e^{x}\cos(2x) + B e^{x}\sin(2x) + C$$

ESEMPIO

$$u'' - 2u' + u = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \qquad m = 2$$

$$u(x) = \underbrace{A e^{1x} + B x e^{1x}}_{2 \text{ addendi}} = \underbrace{(A + Bx)}_{\deg < 2} e^{x}$$

ESEMPIO

- se le radici multiple sono complesse coniugate si moltiplicano per le potenze di x entrambi i termini con cos e sin.

$$u'''''' + 3u'''' + 3u'' + u = 0$$

$$\lambda^6 + 3\lambda^4 + 3\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^3 = 0$$

$\lambda_{1,2} = \pm i$ con molteplicità $m=3$

$$u(x) = A\cos x + B\sin x + Cx\cos x + Dx\sin x + Ex^2\cos x + Fx^2\sin x$$
$$= (A + Cx + Ex^2)\cos x + (B + Dx + Fx^2)\sin x$$

---

2. Equazioni non omogenee

Sono equazioni della forma:

(2) $$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 \cdot u = g(x)$$

ovvero

$$L[u] = g$$

con $L[u]$ = lato sinistro di (2).

Basta risolvere l'omogenea associata (1) ovvero: $L[u] = 0$

e poi trovare almeno una soluzione particolare u_* di (2) ovvero $L[u_*] = g$.

Allora tutte le soluzioni sono della forma:

$$u = u_* + u_0$$

contiene n parametri

u_0: soluzione generale della omogenea

u_*: soluzione particolare della non-omogenea.

ESEMPIO

$$\boxed{u'' + 2u = x}$$

$g(x) = x$

$L[u] = u'' + 2u$

$u'' + 2u = 0$

$\lambda^2 + 2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$

$u_0(x) = A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x)$

Ad occhio noto che $u_*(x) = \frac{x}{2}$ è soluzione di (2) perché $u_*'' = 0$. Tutte le soluzioni sono:

$$u(x) = \frac{x}{2} + A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x).$$

Come trovo una soluzione particolare di (2)?

(2a) Metodo di somiglianza.

(i) Se $g(x)$ è della forma $g(x) = Q(x)\cdot e^{\lambda x}$ con Q polinomio allora cerco una soluzione con la stessa forma: $u_*(x) = q(x)\cdot e^{\lambda x}$ dove q è un polinomio da determinare

ESEMPIO

$$u'' - u = x^2 \cdot e^{2x}$$

$$u_*(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$$

con lo stesso grado di Q. Lo trovo buttandolo nell'equazione (2).

Attenzione: questo metodo funziona solo se λ non è radice del polinomio associato all'equazione omogenea (VEDI (iii) e (iv))

$$u_*' = (2Ax^2+2Bx+2C+2Ax+B)e^{2x}$$
$$= (2Ax^2+2(A+B)x+2C+B)e^{2x}$$

$$u_*'' = (4Ax^2+4(A+B)x+4C+2B+$$
$$+4Ax+2(A+B))e^{2x}$$
$$= (4Ax^2+(8A+4B)x+4C+4B+2A)e^{2x}$$

$$u_*''-u_* = (3Ax^2+(8A+3B)x+3C+4B+2A)e^{2x} \stackrel{!}{=} x^2e^{2x}$$

$$\begin{cases} 3A=1 \\ 8A+3B=0 \\ 3C+4B+2A=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=1/3 \\ B=-\frac{8}{9} \\ C=-\frac{2}{9}+\frac{32}{27}=\frac{26}{27} \end{cases}$$

$$u_* = \left(\frac{x^2}{3}-\frac{8}{9}x+\frac{26}{27}\right)e^{2x}$$

La soluzione generale è $u(x) = Ae^{x}+Be^{-x}+\left(\frac{x^2}{3}-\frac{8}{9}x+\frac{26}{27}\right)e^{2x}$.

(ii) Lo stesso vale nel caso in cui g è della forma:

$$g(x) = Q(x)e^{\lambda x}\cos\mu x \quad \text{o} \quad g(x) = Q(x)e^{\lambda x}\sin\mu x$$

si cerca una soluzione della forma:

$$u_*(x) = q_1(x)e^{\lambda x}\cos\mu x + q_2(x)e^{\lambda x}\sin\mu x.$$

Funziona solo se $\lambda+i\mu$ non è soluzione del polinomio P associato a (1).

con q_1 e q_2 polinomi da determinare, di grado non superiore al grado di Q.

bisogna mettere entrambi gli addendi (seno e coseno) anche se g ha solo uno dei due.

ESEMPIO $\quad u''+u' = \cos x \qquad \lambda^2+\lambda=0$

$\lambda_1=0 \quad \lambda_2=-1$

$$u_* = A\cos x + B\sin x$$
$$u_*' = -A\sin x + B\cos x$$
$$u_*'' = -A\cos x - B\sin x$$
$$u_*''+u_*' = -(A+B)\sin x + (B-A)\cos x \stackrel{!}{=} \cos x$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B-A=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases} \qquad u^* = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$

$$u(x) = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + A + Be^{-x}$$

(iii) Cosa fare se λ è radice del polinomio P?

Se cerchiamo una soluzione di (2) e $g(x) = Q(x)\, e^{\lambda x}$ ma λ è radice del polinomio $P(\lambda)$ associato all'equazione omogenea allora si fa come in (i) ma la candidata soluzione va moltiplicata per x^m dove m è la molteplicità di λ come soluzione di P.

<u>ESEMPIO</u> $\quad u'' + 2u' + u = \dfrac{3}{e^x}$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 = 0, \qquad \lambda_{12} = -1, \quad m = 2$$

$$g(x) = \frac{3}{e^x} = 3e^{-x}$$

$$u_* = A\, x^{2} e^{-x}$$

$$u_*' = A(-x^2 + 2x)e^{-x}$$

$$u_*'' = A(x^2 - 2x - 2x + 2)e^{-x} = A(x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

$$u_*'' + 2u_*' + u_* = A(\cancel{x^2} - \cancel{4x} + 2 - \cancel{2x^2} + \cancel{4x} + \cancel{x^2})e^{-x}$$

$$= 2Ae^{-x} \stackrel{!}{=} 3e^{-x} \qquad A = \frac{3}{2}$$

$$u_* = \frac{3}{2}x^2 e^{-x}$$

$$u(x) = u_* + u_0 = \frac{3}{2}x^2 e^{-x} + (B + Cx)e^{-x} = \left(\frac{3}{2}x^2 + Cx + B\right)e^{-x}.$$

(IV) e se ho una radice complessa?

Se nell'equazione (2) ho $g(x) = Q(x)\, e^{\lambda x} \cos(\mu x)$

oppure $g(x) = Q(x)\, e^{\lambda x} \sin(\mu x)$

e se $\lambda \pm i\mu$ sono radici del polinomio $P(\lambda)$ associato all'omogenea, si procede come in (iii)

<u>Esempio</u> $\quad u'' + u = x \sin x$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda_{12} = \pm i \qquad\qquad Q(x) = x$$

$$g(x) = x \cdot \sin(x) \qquad \lambda = 0,\ \mu = 1, \quad \lambda + i\mu = i, \quad P(i) = 0$$

$$m = 1$$

$$u_*(x) = (Ax + B)x \cos x + (Cx + D)x \sin x$$

etc....

(2b) METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI ARBITRARIE

Vogliamo trovare una soluzione particolare della equazione:

(2) $$u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = g(x)$$

- scrivo la soluzione generale della omogenea:

$$u_0 = A_1 \cdot u_1 + A_2 u_2 + \dots + A_n u_n$$

- al posto delle costanti A_k metto delle funzioni $A_k(x)$ che risolvono il seguente sistema:

$$\begin{pmatrix} u_1, u_2, \dots, u_n \\ u_1', u_2', \dots, u_n' \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ u_1^{(n-1)} \dots\dots, u_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \\ \vdots \\ A_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$

ESEMPIO

$$u'' - 2u' + u = \frac{e^x}{x}$$

$$u_0 = Ae^x + Bxe^x$$

$$u_* = A(x) e^x + B(x) x e^x$$

$$\begin{cases} A'(x) e^x + B'(x) x e^x = 0 \\ A'(x) e^x + B'(x) (e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A'(x) = -B'(x) \cdot x \\ \cancel{-B'(x) x e^x} + B'(x) e^x + \cancel{B' x e^x} = \frac{e^x}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B'(x) = \frac{1}{x} \\ A'(x) = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A(x) = -x \\ B(x) = \ln|x| \end{cases}$$

$$u_*(x) = -x e^x + \ln|x| x e^x$$

$$\begin{aligned} u(x) &= u_*(x) + u_0(x) \\ &= -xe^x + \ln|x| xe^x + Ae^x + Bx e^x \\ &= (A + (B-1)x + x \ln|x|) e^x \\ &= (A + \tilde{B} x + x \ln|x|) e^x. \end{aligned}$$

con A e B (o $\tilde{B}$) costanti arbitrarie.

(2c) OSSERVAZIONE: possiamo usare il principio di sovrapposizione:

Se devo risolvere $L[u] = g_1 + g_2$ (2c)

Posso trovare u_* soluzione di $L[u_*] = g_1$

u_{**} soluzione di $L[u_{**}] = g_2$

Visto che L è lineare si avrà: $L[u_* + u_{**}] = L[u_*] + L[u_{**}] = g_1 + g_2$

e dunque u_{**} è una soluzione di (2c)